正標数の視点からの射影代数幾何学の研究

山形大学理学部
数理科学科
准教授
深澤　知
(Satoru FUKASAWA)

専門分野 代数幾何学、代数学

キーワード ガウス写像、ガロア点、正標数、代数多様体

研究紹介

$$\alpha_e x^{p^e} + \cdots + \alpha_1 x^p + x + \beta_e y^{p^e} + \cdots + \beta_1 y^p = 0$$

$p > 0$ は標数。「ガロア点を無限個もつ平面代数曲線」を定義する方程式。

代数幾何学を研究しています。代数幾何学とは、代数多様体という幾何学的対象及びその性質を研究する分野です。代数多様体とは、多項式の零点集合として描かれる図形です。例えば直線や円はそれぞれ１次多項式・２次多項式で描かれる代数多様体です。これらは２次までの次数で得られますが、多項式の次数を３以上にすると、観察される現象の多様性が飛躍的に広がります。

代数幾何学においては、さらに「正標数」という世界において代数多様体を観察することができます。正標数の世界の例として、標数２の世界がありますが、そこでは１＋１＝０という式が成立しています。このことによって例えば、ｘの２乗という関数の微分が（定数関数ではないのにもかかわらず）零になります。この関数のグラフの接線を（できる方は）計算してみてください。その奇妙さがわかるかと思います。このように、正標数という世界はある種、「何が起こるかわからない不思議な世界」になっています。

そんな不思議な世界ですので、通常認識している幾何学が通用しなくなることもありますが、不思議世界故の美しい現象が観察されることがあります。上記の代数方程式によって描かれる平面代数曲線は、「ガロア点を無限個もつ」という理想的な性質をもっています。（この性質は長谷川武博氏（立命館大学）との共同研究によって初めて研究されました。）一方、「そのような特徴をもつ代数曲線は正標数の世界にのみ存在し、この方程式で定義される」ことを近年、明らかにしました。このように、研究対象の美しい性質を見つけ・その性質から研究対象の特徴づけや分類を行なうことは、科学一般に通ずる根本的な問題であると思います。

相談･要望に応じられる分野

多項式に関連する話題。広い意味では、代数学に関連する話題。

研究の展開と展望

①早稲田大学の楫元教授・古川勝久助教と共同で、「ガウス写像の微分の階数が零となる射影埋め込みをもつ」という性質（略称：ＧＭＲＺ）を世界で初めて体系的に研究しました。これによって、正標数の代数多様体に対する新たな分類の観点を提案できたものと考えています。ＧＭＲＺを用いて既に分類結果をいくつか得ていますが、さらに様々な代数多様体の分類を試みています。

②新潟大学の吉原久夫教授が1996年に導入した「ガロア点」の研究を行っています。ガロア点とは「代数多様体のある種の対称性を表現する点」ということができますが、「どんな対称性なのか」といった根本的な疑問に答える十分な証拠が出揃っていないまだまだミステリアスな対象です。研究紹介の項で触れたことが一例ですが、「ガロア点の分布」は代数多様体の分類の新しい観点を与えています。この観点からの分類について、著者はいくつか成功的結果を得ています。

また、吉原教授と共同で著した（ガロア点に関する）「未解決問題集」を吉原教授のウェブページにて公開しています。

上記２つの研究から、「代数多様体の分類」を推し進めています。一方、正標数の代数曲線論が符号理論へ応用をもったように、周辺分野との連携によって、正標数の代数幾何学は新たな展開をもたらす力があると考えています。周辺・異分野との関係を意識した研究を行ない、数学研究の新たな発展・展開を創出したいと考えています。

■ 連絡先(E-mail): s.fukasawa@sci.kj.yamagata-u.ac.jp