

数学教育研究センター・山形県和算研究会

山形算額勝負

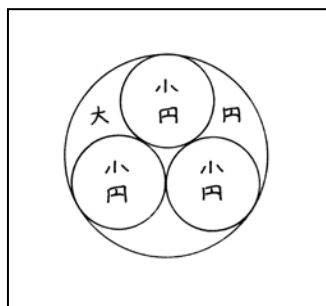
湯殿山神社を目指せ

オリジナル問題作成部門参考問題集

2018年度

問題 1

今有如図大円内容小円三個
 只云大円径一十寸問小円径幾何
 答曰四寸六分四厘一毛有奇
 の問題文を現代文に書き換えると



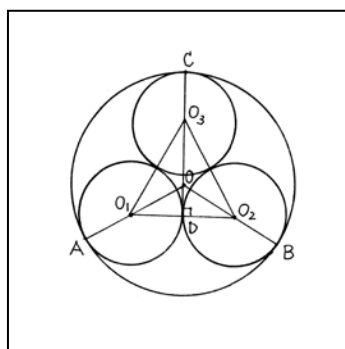
互いに外接している合同な 3 つの小円が、
 図のように大円に内接しています。
 大円の直径の長さが 10 寸のとき、小円の直径の長さを求めなさい。

となります。もし、長さの単位「寸」が不都合と思われるので「10 寸」を「10 cm」と代えて書き換えた問題文は

互いに外接している合同な 3 つの小円が、図のように大円に内接しています。
 大円の直径の長さが 10 cm のとき、小円の直径の長さを求めなさい。

となります。書き換えた問題文の解法は次のようになります。

大円の中心を O ，小円の中心を O_1, O_2, O_3 とします。下の図を参照します。
 各小円が大円と内接する点をそれぞれ A, B, C とし、線分 O_1O_2 の中点 (円 O_1 と円 O_2 の外接点です) を D とします。



三角形 $O_1O_2O_3$ は正三角形となります (証明が必要です)。線分 O_1A は小円の半径ですから、 $O_1A = x$ とおくと正三角形 $O_1O_2O_3$ の 1 辺の長さは $2x$ となります。正三角形の性質より、線分 OO_3 の長さは線分 O_3D の長さの $\frac{2}{3}$ とな

りますから $OO_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3}x$ となります。一方、線分 OA は大円の半径ですから

$OC = 5$ です。そして、 $OC = OO_3 + O_3A$ となることより $\frac{2\sqrt{3}+3}{3}x = 5$ が成り立

ちます。よって $x = \frac{15}{2\sqrt{3}+3} = 10\sqrt{3} - 15$ ，すなわち $2x = 20\sqrt{3} - 30$ です。よ

って、求める小円の直径の長さは $20\sqrt{3} - 30$ cm です。

(注) 上記の解法をどのように簡潔に記述するのも、算額作成の大切なポイントになります。また、和算流に答えるなら、答曰四寸六分四厘一毛有奇 となります。

さて、提示したこの問題からどのような問題を連想・発想するのか、子ども達に期

待します。しかし、ちょっと後押しをするならば

- ・小円の個数を増やし、その配置に工夫を施す。
- ・小円の代わりに、正方形などを考える。
- ・大円の代わりに、長方形などを考える。

など、いろいろあると思います。ある図形の内にいろいろな図形を入れることは和算家も考えたことです。

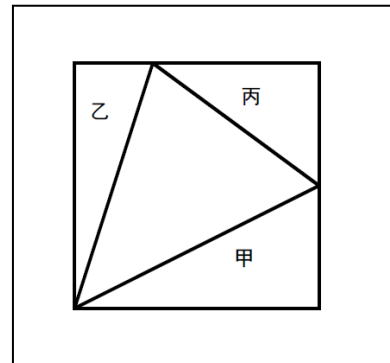
問題 2 :

今有如図直内容三斜設甲乙丙積
只云甲積四歩又云乙積二歩別云
直積一十六歩問三斜積幾何

答曰三斜積七歩

術曰以別云除只云因又云二段以
減別云半得三斜積合問

岩代国信夫郡荒井村 佐藤刻治 撰

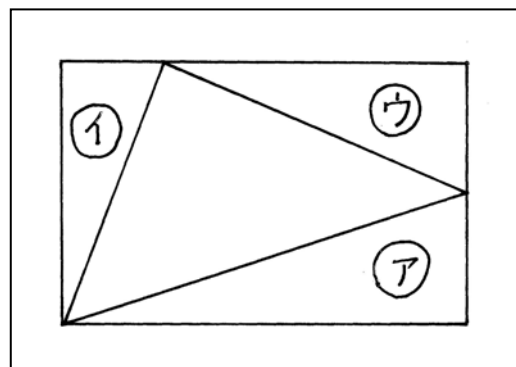


これは福島県田村市の秋田山龍穩院算額
(明治 26 年[1893]奉納) 第 3 問です。

「直」は長方形, 「三斜」は(一般の) 三角形のことです。「甲積」は甲という部分の面積のこと, あるいはその面積の値を表します。「歩」は面積の単位で 1 歩は 1 間四方の広さ(約 3.30579 m^2) です。「只云, 又云, 別云」はそれぞれ「第 1 番目の条件を言うと, 第 2 番目の条件を言うと, 第 3 番目の条件を言うと」のいみです。

小学生向けに問題を現代流に書き換えると

右の図のように, 長方形の内に三角形があります。その三角形の周りに 3 つの直角三角形 ㉞, ㉟, ㊱があります。長方形の面積は 16 m^2 , 直角三角形 ㉞ の面積は 4 m^2 , 直角三角形 ㉟ の面積は 2 m^2 です。真ん中にある三角形の面積を求めなさい。

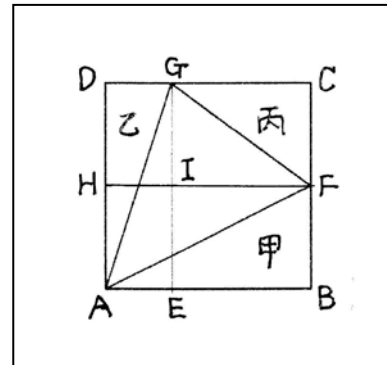


(注) 右図は面積比をほぼ考慮して描きました。直角三角形の面積は直角を挟む 2 つの辺を共有する長方形の面積の半分に等しいことと, 2 つの長方形の面積比は対応する辺の長さの比に等しいこと, の 2 点を考えると小学生でも解答できる問題です。

中学生向けに問題を現代流に書き換えると

図のように、長方形 ABCD 内に三角形 AFG があり、直角三角形 ABF を甲、直角三角形 AGD を乙、直角三角形 CGF を丙とし、面積を考えます。甲の面積の値は 4 m^2 、乙の面積の値は 2 m^2 、長方形の面積の値は 16 m^2 とします。このとき、三角形 AFG の面積の値を求めなさい。

(右の図を参照。)



となります。

書き換えた問題の解法は以下の通りです。

点 F を通り辺 AB に平行な直線が辺 DA と交わる点を H とし、辺 AD と平行な線分 EG と線分 FH との交点を I とします。

甲の面積の値が 4 m^2 であることより、長方形 ABFH の面積の値は 8 m^2 となり、これは長方形の面積の値の半分です。

よって、点 F、点 H はそれぞれ線分 BC、線分 DA の中点です。次に、乙の面積の値が 2 m^2 であることより、長方形 AEGD の面積の値は 4 m^2 となります。よって、長方形 EBCG の面積の値は 12 m^2 となります。長方形 EBDG は線分 FH によって二等分されますから、長方形 FCGI の面積の値は 6 m^2 となります。長方形 FCGI の面積の値は直角三角形 CGF の面積の値の倍ですから、直角三角形 CGF の面積の値、すなわち、丙の面積の値は 3 m^2 となります。よって、長方形の面積の値から甲と乙と丙それぞれの面積の値の和を減じると求める三角形 AFG の面積の値が得られます。すなわち

$$16 - (4 + 2 + 3) = 16 - 9 = 7$$

より、三角形 AFG の面積の値は 7 m^2 です。

提示した問題の類題を作ることを子ども達に促すことができます。それによって、算額を考え、作成できると思います。またこの問題の発展として

長方形 ABCD 内に三角形 AEF を設定し、

- ・ 三角形 AEF が角 E が直角である場合
- ・ 三角形 AEF が一般の三角形である場合

などを考え、どこの値を与えたならば良い問題であり複雑でない解法となるか、高校生に期待したい。

